Analisi 2. Terzo Compitino. 24.04.2021

*Campo obbligatorio

1. Indirizzo email *

2. ISTRUZIONI *

Istruzioni di compilazione: Si usi:
· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· le combinazioni `>=` per il maggiore o eguale $\geq$ e `<=` per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
· il carattere `_` per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 15 minuti)

3. Nome *

4. Cognome *

5. Matricola *

6. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Domanda 1

Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{16+3^n n^4} x^n$ e sia R il corrispondente raggio di convergenza.

7. 1 punto

Si calcoli R.

8. 1 punto

Si dica quale dei seguenti intervalli coincide con l'insieme delle x per cui la serie converge.

$$(a) \quad]-R,R[\qquad (b) \quad [-R,R[\qquad (c) \quad]-R,R] \qquad (d) \quad [-R,R]$$

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)

9. 3 punti

Si dica se la serie converge uniformemente su $[-R, R]$.

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

10. 2 punti

Si calcoli $f''(0)$ (oppure si scriva "non esiste").

____

Domanda 2

Si consideri la seguente serie trigonometrica complessa: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} e^{2int}$.

11. 1 punto

Si scriva il periodo di f.

____

12. 1 punto

Si dica se f è reale.

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

13. 1 punto

Si dica se f è pari.

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

14. 2 punti

Si dica quali delle seguenti espressioni mi dà l'energia di f:

$(a)\quad \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$ $\qquad$ $(b)\quad \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{1+n^4}$

$(c)\quad \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{1+n^4}$ $\qquad$ $(d)\quad \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{1+2n^2+n^4}$

$(e)\quad \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{1+2n^2+n^4}$ $\qquad$ $(f)\quad \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n}{1+2n^2+n^4}$

$(g)\quad \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{1+n^4}$ $\qquad$ $(h)\quad \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{1+2n^2+n^4}$

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)
- (f)
- (g)
- (h)
- Altro: ______________________

Domanda 3

Si consideri la funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (x - \pi)^2$$

e il problema differenziale con dato nullo al bordo:

$$\begin{cases} y'' + 4y = f & \text{su }]0, \pi[\\ y(0) = y(\pi) = 0 & . \end{cases} \tag{P}$$

Indichiamo anche con u_n i coefficienti dello sviluppo di Fourier di f in soli seni sull'intervallo $[0, \pi]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx). \tag{$\mathcal{F}$}$$

15. 5 punti

Si calcolino gli u_n.

16. 1 punto

Si dica se in $(\mathcal{F})$ la convergenza della serie a f è uniforme (su $[0, \pi]$).

Contrassegna solo un ovale.

- SI'
- No

17. 1 punto

Si dia una breve motivazione per la risposta alla domanda precedente.

18. 2 punti

Si dica quale tra le seguenti affermazione è corretta:

(a) (P) ha una soluzione unica;

(b) (P) ha soluzione, ma non unica;

(c) (P) non ha soluzione.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)

Domanda 4

Si consideri la seguente equazione differenziale lineare (non omogenea):

$$(x^2+2x)y'' + (4x-6)y' + 2y = -24 + 120x^3 \qquad (\mathcal{E})$$

19. 2 punti

Se imponiamo la condizione $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, allora:

(a) $(\mathcal{E})$ ha un'unica soluzione;
(b) $(\mathcal{E})$ ha più di una soluzione;
(c) $(\mathcal{E})$ non ha nessuna soluzione.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)

20. 2 punti

Se imponiamo la condizione $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$, allora:

(a) $(\mathcal{E})$ ha un'unica soluzione;
(b) $(\mathcal{E})$ ha più di una soluzione;
(c) $(\mathcal{E})$ non ha nessuna soluzione.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)

21. 2 punti

Se imponiamo la condizione $y(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = 6$, allora:

(a) $(\mathcal{E})$ ha un'unica soluzione;
(b) $(\mathcal{E})$ ha più di una soluzione;
(c) $(\mathcal{E})$ non ha nessuna soluzione.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)

22. Criterio (b)

2 punti

Si trovi (oppure si scriva "non esiste") una soluzione di $(\mathcal{E})$ tale che $y^{(4)}(0) = 0$.

Domanda 5

Si consideri l'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e campi $\vec{f}_1/\vec{f}_2/\vec{f}_3 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$\Omega := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2 + y^2 < 4\right\},$$

$$\vec{f}_1(x, y) := \frac{y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}}}{x^2 + y^2}, \qquad \vec{f}_2(x, y) := \frac{x\vec{\mathbf{i}} - y\vec{\mathbf{j}}}{x^2 + y^2}, \qquad \vec{f}_3(x, y) := \frac{x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}}{x^2 + y^2}.$$

23.

1 punto

$\vec{f}_1$ è conservativo.

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

24.

1 punto

$\vec{f}_2$ è radiale.

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

25. 2 punti

$\vec{f_2}$ è conservativo.

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

26. 2 punti

$\vec{f_3}$ è irrotazionale.

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

Domanda 6

Si considerino il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$\vec{f}(x,y) := (3x+2y)\vec{\mathbf{i}} + (2x-3y)\vec{\mathbf{j}} \qquad \gamma(t) := t\left(\cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}}\right).$$

27. 5 punti

Si calcoli

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Questi contenuti non sono creati né avallati da Google.

Google Moduli